2018-2019 ÖĞR. YILI ANALİZ 3 DERSİ A-B GRUPLARI İKİNCİ QUİZ SINAVI

1)Her $n\in\mathbb{N}$ için $f_n:[0,1]\to\mathbb{R},\ f_n(x)=n^2x(1-x)^n$ olmak üzere (f_n) fonksiyon dizisinin sıfır fonksiyonuna noktasal yakınsak olduğunu, ama düzgün yakınsak olmadığını gösteriniz.

Çözüm: Eğer $x=0\vee x=1$ ise her $n\in\mathbb{N}$ için $f_n(x)=0$, böylece $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$ olur.

Eğer $0<x<1$ ise

$$\lim_{n\to\infty}n^2x(1-x)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2x}{(1-x)^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2x\right)'}{\left((1-x)^{-n}\right)'}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2nx}{(1-x)^{-n}\ln(1-x)^{-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2nx)'}{\left((1-x)^{-n}\ln(1-x)^{-1}\right)'}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2x}{(1-x)^{-n}\ln^2(1-x)^{-1}}=0$$

olur. Böylece $[0,1]$ üzerinde $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0\ (\mathrm{n.y})$dır.

Ayrıca her $n\in\mathbb{N}$ için

$$(f_n)'(x)=n^2(1-x)^n-n^3x(1-x)^{n-1}$$
$$=n^2(1-x)^{n-1}(1-x-nx)=n^2(1-x)^{n-1}(1-x(1+n))$$

ve $(f_n)'(x)=0\Leftrightarrow x=(1+n)^{-1}\vee x=1$ olup,

$$\sup\left\{\left|f_n(x)-0\right|:x\in[0,1]\right\}=\sup\left\{n^2x(1-x)^n:x\in[0,1]\right\}$$
$$=f_n\left(\frac{1}{1+n}\right)=n^2\frac{1}{1+n}\left(1-\frac{1}{1+n}\right)^n\to\infty$$

olduğundan yakınsama düzgün değildir.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{2x+1}{x}\right)^{n}$ serisinin yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

Çözüm.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{2x+1}{x}\right)^{n+1}:\frac{n}{n+1}\left(\frac{2x+1}{x}\right)^{n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{(n+2)n}\left(\frac{2x+1}{x}\right)\right|=\left|\frac{2x+1}{x}\right|$$

olup, seri $\left|\frac{2x+1}{x}\right|<1$ koşulunu sağlayan x noktaları için yakınsaktır. Buradan

$$-1<\frac{2x+1}{x}<1\Rightarrow -1<2+\frac{1}{x}<1\Rightarrow -3<\frac{1}{x}<-1\Rightarrow -1<x<-\frac{1}{3}$$

noktaları için seri yakınsaktır.

$x=-1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{-2+1}{-1}\right)^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ olup $a_n=\frac{n}{n+1}$ olmak üzere $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\neq 0$ olduğundan verilen $x=-1$ için ıraksaktır.

Yine $x=-\frac{1}{3}$ için $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{-\frac{2}{3}+1}{-\frac{1}{3}}\right)^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$ olup $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$ limiti var olmadığından verilen seri $x=-\frac{1}{3}$ için ıraksaktır. O halde verilen serinin yakınsaklık yarıçapı $R=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}-(-1)\right)=\frac{1}{3}$ ve yakınsaklık aralığı da $(-1,-1/3)$ açık aralığıdır.

26-12-2018

Prof.Dr.Cenap DUYAR Doç.Dr.Ayşe SANDIKÇI